

テンソルのランク概念と エンタングルメント多面体上の凸最適化

坂部圭哉 (ミュンヘン大学)

共同研究者：M. Levent Doğan & Michael Walter

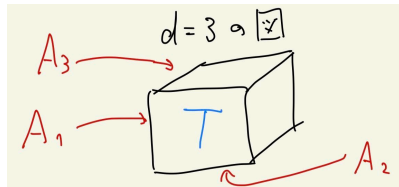
最適化，計算機科学，代数幾何 @電気通信大学

2026 年 9 月 24 日

- ① テンソルの quantum functional
- ② 多面体上の凸最適化—鏡像降下法によるアプローチ
- ③ Kempf–Ness 関数によるエンタングルメント多面体の表現
- ④ Q -ノルム最小化問題に対する Hadamard 鏡像降下法
- ⑤ 構造的結果：サポート多面体との関係

d -テンソル： d 次元配列

$T = (T_{i_1, \dots, i_d}) \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{n_d}$
 $n_1 \times \dots \times n_d$ の形状をした複素配列



行列を掛けることができる：

テンソル $T \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{n_d}$ と (正方でなくてもよい) 行列 $A_1, \dots, A_d$ に対し,

$$((A_1, \dots, A_d) \cdot T)_{i_1, \dots, i_d} := ((A_1 \otimes \dots \otimes A_d) T)_{i_1, \dots, i_d} := \sum_{j_1, \dots, j_d} (A_1)_{i_1, j_1} \dots (A_d)_{i_d, j_d} T_{j_1, \dots, j_d}$$

制限 (restriction)： $S \leq T \stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists A_1, \dots, A_d \text{ s.t. } S = (A_1, \dots, A_d) \cdot T$

テンソルのランク概念

3/29

行列 ($d = 2$) のとき, 行列 A のランクは (例えば) 次で特徴付けられる:

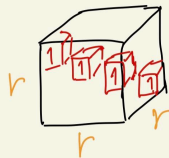
$$\text{rk}(A) = \min\{r \mid A \leq I_r\} = \max\{r \mid I_r \leq A\}$$

$d(\geq 3)$ -テンソルのとき, 上の二つの値は一般に異なる:

$$\text{(テンソル) ランク} \quad \text{rk}(T) := \min\{r \mid T \leq \langle r \rangle\}$$

$$\text{サブランク} \quad \text{subrk}(T) := \max\{r \mid \langle r \rangle \leq T\}$$

$\langle r \rangle$: 単位テンソル



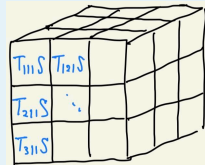
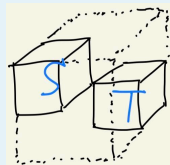
漸近ランク: クロネッカー積 (次頁) による漸近的な値

$$\widetilde{\text{rk}}(T) := \lim_{m \rightarrow \infty} \text{rk}(T^{\boxtimes m})^{1/m}, \quad \widetilde{\text{subrk}}(T) := \lim_{m \rightarrow \infty} \text{subrk}(T^{\boxtimes m})^{1/m}$$

☆ Matrix multiplication exponent $\omega = \log_2(\widetilde{\text{rk}}(\text{MM}_2))$ [Strassen, 1980s]
(現状のバウンドは, $2 \leq \omega \leq 2.371\dots$)

$\mathcal{X}$ を、以下を満たす関数 $F: \{d\text{-テンソル}\} \rightarrow \mathbb{R}$ の集合とする：

- 正規化： $F(\langle r \rangle) = r$
- 加法性： $F(S \oplus T) = F(S) + F(T)$
- 乗法性： $F(S \boxtimes T) = F(S)F(T)$
- 単調性： $S \leq T \implies F(S) \leq F(T)$



命題 [Strassen, 1980s]

$$\widetilde{\text{rk}}(T) = \max_{F \in \mathcal{X}} F(T), \quad \widetilde{\text{subrk}}(T) = \min_{F \in \mathcal{X}} F(T)$$

より一般に、漸近的制限 $S^{\boxtimes m} \leq T^{\boxtimes (m+o(m))} \iff F(S) \leq F(T) \ (\forall F \in \mathcal{X})$

- $d = 2$ (行列) のとき、上を満たす F は**行列ランク**のみ
- $d \geq 3$ のとき、具体的に知られた F は **Quantum functional** (後述) のみ
- $d \geq 4$ のとき、上記以外のものが存在 [Alman et al., 2026, Botero et al., 2026]

平坦化 (Flattening)

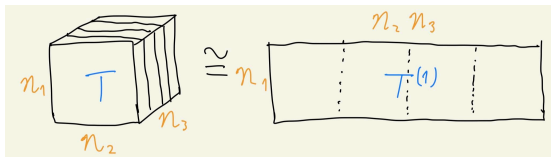
5/29

テンソル $0 \neq T \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{n_d}$

$1 \leq \ell \leq d$ に対して,

- T の ℓ 番目の平坦化 $T^{(\ell)}$:

T を $n_\ell \times (n_1 \cdots n_{\ell-1} n_{\ell+1} \cdots n_d)$ 行列とみなしたもの



- ℓ 番目の **one-body marginal** $\mu_\ell(T) := \frac{T^{(\ell)} T^{(\ell)\dagger}}{\|T\|^2} \in \text{PSD}(n_\ell)$

性質:

- $\mu_\ell(T)$ は半正定値, $\text{tr } \mu_\ell(T) = 1$
 $\implies \text{spec } \mu_\ell(T)$ は確率ベクトル
- $u_1, \dots, u_d$: ユニタリ $\implies \mu_\ell((u_1, \dots, u_d) \cdot T) = u_\ell \mu_\ell(T) u_\ell^\dagger$
 $\implies \text{spec } \mu_\ell((u_1, \dots, u_d) \cdot T) = \text{spec } \mu_\ell(T)$

$$\begin{aligned}\Delta(T) &:= \overline{\{(\text{spec}(\mu_1(S)), \dots, \text{spec}(\mu_d(S))) \mid S = (g_1, \dots, g_d) \cdot T, g_\ell \in \text{GL}(n_\ell)\}} \\ &= \overline{\{(\text{spec}(\mu_1(S)), \dots, \text{spec}(\mu_d(S))) \mid S = (x_1, \dots, x_d) \cdot T, x_\ell \in \text{PD}(n_\ell)\}}\end{aligned}$$

命題 [Kirwan, 1984, Ness and Mumford, 1984]

$\Delta(T)$ は凸多面体.

- 量子情報の文脈で、多体系の量子エンタングルメントの種類を区別するために導入 [Walter et al., 2013]
- 非常に複雑な多面体
 - 頂点や面が指数個存在
 - $\Delta(T)$ を計算するアルゴリズム [van den Berg et al., 2025] は、 $4 \times 4 \times 4$ テンソルまでしか実用的でない

「エンタングルメント多面体上のエントロピー最大化」

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$: 確率ベクトル, $0 \neq T \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{n_d}$

Quantum functional [Christandl et al., 2023]

- $E_\theta(T) := \max_{(p_1, \dots, p_d) \in \Delta(T)} \sum_{\ell \in [d]} \theta_\ell H(p_\ell) = \sup_{S=(g_1, \dots, g_d) \cdot T} \sum_{\ell \in [d]} \theta_\ell H(\text{spec } \mu_\ell(S))$
- $F_\theta(T) := e^{E_\theta(T)}$

命題 [Christandl et al., 2023]

任意の確率ベクトル θ に対して, $F_\theta \in \mathcal{X}$

しかし, $F_\theta(T)$ を計算する効率的なアルゴリズムは知られていない！！

関連：テンソルスケーリング [Verstraete et al., 2003, Bürgisser et al., 2018]

「すべての ℓ で同時に $\mu_\ell(S) \approx I_{n_\ell}/n_\ell$ となる $S = (g_1, \dots, g_d) \cdot T$ を見つけよ」

スケール可能 $\iff E_\theta$ が最大値を取る ($\theta > 0$ の場合)

テンソルスケーリング問題の「定量化版」とみなせる

- アルゴリズム的な結果： (arXiv:2609.06633)

Quantum functional $F_\theta(T)$ を計算する初めての効率的なアルゴリズムを提案

Entropic tensor scaling:

$$T_{k+1} := (\mu_1(T_k)^{-\theta_1/2}, \dots, \mu_d(T_k)^{-\theta_d/2}) \cdot T_k$$

- E_θ を $\mathcal{O}(k^{-1})$ の誤差で計算，定数は入力長の多項式
- 構造的な結果： (arXiv:2601.21553)
Quantum functional が，Support functional (後述) に一致することを証明
- 30 年以上前の予想を解決

☆ 上述の結果は，Quantum functional (エントロピー最大化) に限らず，スペクトルの凸関数の最小化全般に当てはまる．

- ℓ_∞ -ノルム最小化 $\rightarrow$ G -stable rank [Derksen, 2022]
- 一様分布への ℓ_1 -ノルム最小化 $\rightarrow$ 非可換ランク [Hirai, 2026]

- ① テンソルの quantum functional
- ② 多面体上の凸最適化—鏡像降下法によるアプローチ
- ③ Kempf–Ness 関数によるエンタングルメント多面体の表現
- ④ Q -ノルム最小化問題に対する Hadamard 鏡像降下法
- ⑤ 構造的結果：サポート多面体との関係

☆以下，関数の (下半) 連続性・微分可能性などは適当に仮定してあるものとする

多面体制約つき凸最適化問題：

$$\text{minimize: } Q(p) \quad \text{s.t. } p \in C \quad (C \subseteq \mathbb{R}^n: \text{多面体}, Q: \text{凸関数})$$

制約集合 C を考慮する手法の一つ：勾配集合として表す

$C = \text{conv}\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ と，頂点が分かっている場合は，

$$f(z) := \log \left(\sum_{j=1}^N q_j e^{\langle \omega_j, z \rangle} \right) \quad (q_j > 0, \forall j \in [N])$$

により， $C = \overline{\nabla f(\mathbb{R}^n)}$ であるから，以下の**無制約問題**に変換

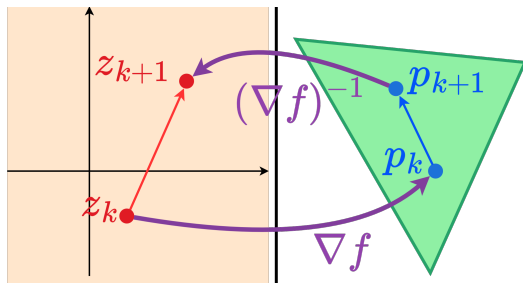
$$\min_{p \in C} Q(p) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} Q(\nabla f(z))$$

逆の手順で，このような形の f を与えれば，多面体制約 C が決定される

minimize: $Q(\nabla f(z))$ (f, Q : 凸関数)

この問題は、**鏡像降下法** [Nemirovsky and Yudin, 1983] により自然に解ける.

※通常の慣例とは記号の置き方が違う (f^* に記号を与えることが多い)



$$z_{k+1} = z_k - \eta \nabla Q(\nabla f(z_k)) \quad \left| \quad (\nabla f)^{-1}(p_{k+1}) = (\nabla f)^{-1}(p_k) - \eta \nabla Q(p_k) \right.$$

適切な状況 (e.g., 相対的平滑性) で, $\mathcal{O}(k^{-1})$ 収束 [Bauschke et al., 2017, Lu et al., 2018]

例: サポート多面体 (support polytope)

12/29

テンソル $0 \neq T \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{n_d}$

以下の関数 $f_T^S: \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_d} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える (※テンソルの内積やノルムは自然に定める) :

$$\begin{aligned} f_T^S(z_1, \dots, z_d) &:= \log \|(e^{\text{diag} z_1/2}, \dots, e^{\text{diag} z_d/2}) \cdot T\|^2 \\ &= \log \langle T, (e^{\text{diag} z_1}, \dots, e^{\text{diag} z_d}) \cdot T \rangle \\ &= \log \left(\sum_{i_1, \dots, i_d} |T_{i_1, \dots, i_d}|^2 e^{z_1, i_1 + \dots + z_d, i_d} \right) \\ &= \log \left(\sum_{T_{i_1, \dots, i_d} \neq 0} |T_{i_1, \dots, i_d}|^2 e^{z_1, i_1 + \dots + z_d, i_d} \right) \end{aligned}$$

この勾配集合は, $\overline{\nabla f_T^S(\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_d})} = \text{conv}\{(e_{i_1}, \dots, e_{i_d}) \mid T_{i_1, \dots, i_d} \neq 0\}$

T のサポート (非零要素の位置) の情報を持つ $\implies$ **サポート多面体** $\Omega(T)$

- ① テンソルの quantum functional
- ② 多面体上の凸最適化—鏡像降下法によるアプローチ
- ③ Kempf–Ness 関数によるエンタングルメント多面体の表現
- ④ Q -ノルム最小化問題に対する Hadamard 鏡像降下法
- ⑤ 構造的結果：サポート多面体との関係

Quantum functional は，エンタングルメント多面体上の凸最適化だった

Q: エンタングルメント多面体を勾配集合に持つ凸関数 f は構成できるか？

A: 「Euclid 空間では」 難しい

曲がった空間 (多様体) 上の測地的凸関数の勾配集合として自然に書ける！

※以下の流れに沿った問題の定式化は [Hirai, 2025] に基づく．

$\text{PD}(n)$: $n \times n$ 正定値エルミート行列全体の集合

以下の計量を導入する：

$$(X, Y)_{T_x \text{PD}(n)} := \text{tr}[x^{-1} X x^{-1} Y] \quad (X, Y \in T_x \text{PD}(n) \cong \text{Herm}(n))$$

- **Hadamard 多様体** (完備・単連結・断面曲率 ≤ 0)
- 代表的な**対称空間**の例
- 任意の $g \in \text{GL}(n)$ に対し, $\text{PD}(n) \ni x \mapsto g^\dagger x g \in \text{PD}(n)$ は等長変換
- 任意の $g \in \text{GL}(n)$ に対し, $\mathbb{R}^n \ni z \mapsto g^\dagger e^{\text{diag} z} g \in \text{PD}(n)$ は等長埋め込み
- 特に, 測地線は $t \mapsto g^\dagger e^{\text{diag}(z+tw)} g$ で与えられる ($g \in \text{GL}(n), z, w \in \mathbb{R}^n$).

以下, $\mathcal{M} := \text{PD}(n_1) \times \cdots \times \text{PD}(n_d)$ を考える.

テンソル $0 \neq T \in \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_d}$ に対し, **Kempf–Ness 関数**
 $f_T: \mathcal{M} := \text{PD}(n_1) \times \cdots \times \text{PD}(n_d) \rightarrow \mathbb{R}$ は以下で与えられる:

$$f_T(x) = f_T(x_1, \dots, x_d) := \log \left\| \left(x_1^{1/2}, \dots, x_d^{1/2} \right) \cdot T \right\| = \log \langle T, (x_1, \dots, x_d) \cdot T \rangle$$

Euclidean な各部分多様体 $g^\dagger e^{\text{diag}(\cdot)} g$ で, サポート多面体を与える関数に帰着:

$$f_T(g_1^\dagger e^{z_1} g_1, \dots, g_d^\dagger e^{z_d} g_d) = \log \left\| \left(e^{\text{diag} z_1 / 2}, \dots, e^{\text{diag} z_d / 2} \right) \cdot (g \cdot T) \right\| = f_{g \cdot T}^S(z_1, \dots, z_d)$$

$\implies f_T$ は測地的凸 (すべての測地線に沿って凸)

※ 「Kempf–Ness 関数」という用語は, より一般の群の表現に対しても用いられる.

疑問：「勾配全体の集合」はどうなるか？

f_T の $x \in \mathcal{M}$ での (勾配ではなく) 微分は, 余接空間の元: $df_T(x) \in T_x^* \mathcal{M}$
 $df_T(x) \in T_x^* \mathcal{M} \cong \text{Herm}(n)^* \cong \text{Herm}(n)$ のもと,

$$df_T(x) = \left(x_1^{-1/2} \mu_1(S) x_1^{-1/2}, \dots, x_d^{-1/2} \mu_d(S) x_d^{-1/2} \right) \quad (S := (x_1^{1/2}, \dots, x_d^{1/2}) \cdot T)$$

再掲: $\mu_\ell(S) := \frac{S^{(\ell)} S^{(\ell)\dagger}}{\|S\|^2}$

単位元 $(I, \dots, I) \in \mathcal{M}$ まで測地線に沿って**平行移動**すると, $x_\ell^{-1/2}$ が打ち消される:

$$\tau_{I \rightarrow x}^* df_T(x) = (\mu_1(S), \dots, \mu_d(S)) \quad (S := (x_1^{1/2}, \dots, x_d^{1/2}) \cdot T)$$

ゆえに, エンタングルメント多面体を得る:

$$\Delta(T) = \overline{\{\text{spec } \tau_{I \rightarrow x}^* df_T(x) \mid x \in \mathcal{M}\}}$$

再掲: $\Delta(T) = \overline{\{(\text{spec}(\mu_1(S)), \dots, \text{spec}(\mu_d(S))) \mid S = (x_1, \dots, x_d) \cdot T, x_\ell \in \text{PD}(n_\ell)\}}$

$$\min_{p \in \Delta(T)} \phi(p) = \inf_{x \in \mathcal{M}} \phi(\text{spec } \tau_{I \rightarrow x}^* df_T(x))$$

- 目的関数 $\phi: \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_d} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$: 凸関数
- さらに ϕ が各要素内で**対称**を仮定:
 $\phi(P_1 q_1, \dots, P_d q_d) = \phi(q_1, \dots, q_d)$ ($P_1, \dots, P_d$: 置換行列)
 $\implies$ エルミート行列上の関数 Φ に自然に拡張される:

$$\Phi(X_1, \dots, X_d) = \phi(\text{spec } X_1, \dots, \text{spec } X_d)$$

- 余接バンドル $T^*\mathcal{M}$ 上の関数 Q を $Q_x := \Phi \circ \tau_{I \rightarrow x}^*$ と定める
※実は、これは平行移動の経路の取り方によらない
 $\implies Q$ は平行移動で不変 (次頁)

以下の同値な表現を得る

$$\text{minimize}_{x \in \mathcal{M}} \quad \phi(\text{spec}(\tau_{I \rightarrow x}^* df(x))) = \Phi(\tau_{I \rightarrow x}^* df(x)) = Q(df(x))$$

- ① テンソルの quantum functional
- ② 多面体上の凸最適化—鏡像降下法によるアプローチ
- ③ Kempf–Ness 関数によるエンタングルメント多面体の表現
- ④ Q -ノルム最小化問題に対する Hadamard 鏡像降下法
- ⑤ 構造的結果：サポート多面体との関係

以上の事実に基づき, [Hirai, 2025] は「Q-ノルム最小化問題」を提案:

$$\text{minimize: } Q(df(x)) \quad \text{s.t. } x \in \mathcal{M} : \text{Hadamard 多様体}$$

ここで,

- $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$: 測地的凸 (任意の測地線に沿って凸)
- "norm-like function" $Q: T^*\mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は以下を満たす:¹
 - 各点 $x \in \mathcal{M}$ で, $Q_x: T_x^*\mathcal{M} \rightarrow (-\infty, +\infty]$: 凸関数
 - 平行移動に対して不変: $Q_x = Q_y \circ \tau_{y \leadsto x}^*$

任意の曲線に沿った平行移動

¹ Q の正則性や非負性などに元論文 [Hirai, 2025] と差異あり.

再掲：

$$\text{minimize: } Q(df(x)) \quad \text{s.t. } x \in \mathcal{M}$$

[Hirai, 2025] はこの最小化問題に対し、 Q -勾配流² を提案：

Q -勾配流 (Q -gradient flow)

$$\dot{x}_t = -dQ_{x_t}(df(x_t)) \quad (\in T_{df(x)}^* T_x^* \mathcal{M} \cong (T_x^* \mathcal{M})^* \cong T_x \mathcal{M})$$

命題 [Hirai, 2025]

- $Q(df(x_t))$ は単調非増加
- 広いクラスの Hadamard 多様体 ($\mathbb{R}^n$, $\text{PD}(n)$ やその直積を含む) で,
 $Q(df(x_t)) \rightarrow \inf_{x \in \mathcal{M}} Q(df(x))$.

※鏡像降下法の連続極限との関係は指摘されていなかった。

²元論文 [Hirai, 2025] では、 Q の代わりに $Q^2/2$ を使用．元論文ではさらに $Q \geq 0$ を仮定していたため、 Q の最小化と Q^2 の最小化は等価だった．

我々 (arXiv: 2609.06633) は,

- Q -勾配流と, 鏡像降下法との関連を指摘
- Q -勾配流を離散化. 鏡像降下法に類似の収束保証を与えた
※下記の離散化の収束性解析が [Hirai, 2025] で open problem となっていた

Hadamard 鏡像降下法: $x_{k+1} := \exp_{x_k}(-\eta dQ_{x_k}(df(x_k)))$

再掲: 通常の鏡像降下法 (の双対変数表現): $z_{k+1} := z_k - \eta \nabla Q(\nabla f(z_k))$

ステップ幅 η の選び方は, 「相対的平滑性」のアイデアに類似.

定理 (本研究)

通常の鏡像降下法に類似の仮定のもと, $Q(df(x_k))$ は最適値に $\mathcal{O}(k^{-1})$ で収束

Kempf–Ness 関数を用いたエンタングルメント多面体上の最適化の場合，正定値行列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ のアップデートを，テンソル $T_k \sim_{\text{unitary}} x_k \cdot T$ のアップデートとして書き直せる．

以下の問題に対し，

$$\text{minimize}_{x \in \mathcal{M}} \quad \phi(\text{spec}(\tau_{I \rightarrow x}^* df(x))) = \Phi(\tau_{I \rightarrow x}^* df(x)) = Q(df(x))$$

アップデート：
$$T_{k+1} \propto \left(\bigotimes_{\ell \in [d]} e^{-\frac{\eta}{2} \nabla_{\ell} \Phi(\mu(T_k))} \right) T_k$$

- ϕ が L -平滑の場合， $\eta = 1/(dL)$ と取れる
- Quantum functional $\phi(p) = -\sum_{\ell \in [d]} \theta_{\ell} H(p_{\ell})$ の場合，**entropic tensor scaling**:

$$T_{k+1} \propto (\mu_1(T_k)^{-\theta_1/2}, \dots, \mu_d(T_k)^{-\theta_d/2}) \cdot T_k$$

- いずれも場合も $\mathcal{O}(k^{-1})$ 収束，定数は入力ビット長の多項式

- ① テンソルの quantum functional
- ② 多面体上の凸最適化—鏡像降下法によるアプローチ
- ③ Kempf–Ness 関数によるエンタングルメント多面体の表現
- ④ Q -ノルム最小化問題に対する Hadamard 鏡像降下法
- ⑤ 構造的結果：サポート多面体との関係

再掲：

$$\text{minimize: } Q(df(x)) \quad \text{s.t. } x \in \mathcal{M}: \text{Hadamard 多様体}$$

[Hirai, 2025] はこれと双対性を持つ最大化問題を発見：

命題 [Hirai, 2025]

広いクラスの Hadamard 多様体 $(\mathbb{R}^n, \text{PD}(n))$ やその直積を含む) で、

$$\inf_{x \in \mathcal{M}} Q(df(x)) = \sup_{\gamma: \text{測地半直線}} -f^\infty(\gamma) - Q^*(-\dot{\gamma})$$

※右辺の関数の意味は説明しない
重要なのは、「測地半直線上の最大化」であること

再掲：

Euclidean な各部分多様体 $g^\dagger e^{\text{diag}(\cdot)} g$ で、サポート多面体を与える関数に帰着：

$$f_T(g_1^\dagger e^{z_1} g_1, \dots, g_d^\dagger e^{z_d} g_d) = \log \left\| \left(e^{\text{diag} z_1/2}, \dots, e^{\text{diag} z_d/2} \right) \cdot (g \cdot T) \right\| = f_{g \cdot T}^S(z_1, \dots, z_d)$$

これを用いると，

$$\begin{aligned} \min_{p \in \Delta(T)} \phi(p) &= \inf_{x \in \mathcal{M}} Q(df_T(x)) = \sup_{\gamma(t) = g^\dagger e^{\text{diag}(z+tw)} g} -f_T^\infty(\gamma) - Q^*(-\dot{\gamma}) \\ &= \sup_{g \in \text{GL}} \sup_{z+tw} -f_{g \cdot T}^{S_\infty}(w) - \phi^*(-w) \\ &= \sup_{g \in \text{GL}} \inf_{y \in \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_d}} \phi(df_{g \cdot T}^S(y)) \\ &= \max_{g \in \text{GL}} \min_{p \in \Omega(g \cdot T)} \phi(p) \end{aligned}$$

定理 (arXiv:2601.21553)

$0 \neq T \in \mathbb{C}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{n_d}$

$\phi: \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_d} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$: 下半連続, 凸, 各要素内対称, $\Delta(T) \subseteq \text{dom } \phi$

このとき

$$\min_{p \in \Delta(T)} \phi(p) = \max_{g_\ell \in \text{GL}(n_\ell)} \min_{p \in \Omega((g_1, \dots, g_d) \cdot T)} \phi(p)$$

「エンタングルメント多面体上の最小値」 =
「サポート多面体上の最小値のうち最大のもの」

特に, 両辺の値は, $\text{GL}(n_\ell)$ の作用によって得られるテンソルの**非零位置のみ**から決定される. (サポート多面体が非零位置のみから決定されるため)

cf. Shrunk subspace と非可換ランクの関連 (e.g., [Fortin and Reutenauer, 2004])

定理 (再掲)

$0 \neq T \in \mathbb{C}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{n_d}$

$\phi: \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_d} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$: 下半連続, 凸, 各要素内対称, $\Delta(T) \subseteq \text{dom } \phi$

このとき

$$\min_{p \in \Delta(T)} \phi(p) = \max_{g_\ell \in \text{GL}(n_\ell)} \min_{p \in \Omega((g_1, \dots, g_d) \cdot T)} \phi(p)$$

特に, ϕ が負のエントロピーのとき, それぞれ異なる量として認識されてきた:

- 左辺: Quantum functional $-\log F_\theta(T)$ [Christandl et al., 2023]
- 右辺: Support functional $-\log \zeta^\theta(T)$ [Strassen, 1980s]

本研究により, すべての複素テンソル T に対して $F_\theta(T) = \zeta^\theta(T)$ が示された!

歴史:

Strassen は $\zeta^\theta \in \mathcal{X}$ を予想したが, 示せなかった. 本研究により, その予想は正しかったことが示された. 以前までは, $F_\theta \leq \zeta^\theta$, 及び自由テンソル (free tensors) では $F_\theta = \zeta^\theta$ が知られていた.

エンタングルメント多面体上の凸最適化

$$\min_{p \in \Delta(T)} \phi(p)$$

ϕ は 対称・凸関数

- アルゴリズム：**Hadamard 鏡像降下法**
- 構造的結果：サポート多面体を介した **max-min 式**

- [Alman et al., 2026] Alman, J., Li, B., and Pratt, K. (2026).
The edge of the asymptotic spectrum of tensors.
- [Bauschke et al., 2017] Bauschke, H. H., Bolte, J., and Teboulle, M. (2017).
A descent lemma beyond Lipschitz gradient continuity: first-order methods revisited and applications.
[Math. Operet. Res.](#), 42(2):330–348.
- [Botero et al., 2026] Botero, A., Christandl, M., Fraser, T. C., Leigh, I., and Nieuwboer, H. (2026).
On quantum functionals for higher-order tensors.
- [Bürgisser et al., 2018] Bürgisser, P., Franks, C., Garg, A., Oliveira, R., Walter, M., and Wigderson, A. (2018).
Efficient algorithms for tensor scaling, quantum marginals, and moment polytopes.
In [59th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science \(FOCS\)](#), pages 883–897.
- [Christandl et al., 2023] Christandl, M., Vrana, P., and Zuiddam, J. (2023).
Universal points in the asymptotic spectrum of tensors.
[Journal of the American Mathematical Society](#), 36(1):31–79.
- [Derksen, 2022] Derksen, H. (2022).
The G-stable rank for tensors and the cap set problem.
[Algebra & Number Theory](#), 16(5):1071–1097.
- [Fortin and Reutenauer, 2004] Fortin, M. and Reutenauer, C. (2004).
Commutative/noncommutative rank of linear matrices and subspaces of matrices of low rank.
[Séminaire Lotharingien de Combinatoire](#), 52:B52f.
- [Hirai, 2025] Hirai, H. (2025).
Generalized gradient flows in Hadamard manifolds and convex optimization on entanglement polytopes.
[arXiv:2511.12064](#).
- [Hirai, 2026] Hirai, H. (2026).
A scaling characterization of nc-rank via unbounded gradient flow.
[Linear Algebra and its Applications](#), 730:525–545.

- [Kirwan, 1984] Kirwan, F. (1984).
Convexity properties of the moment mapping. III.
[*Inventiones mathematicae*, 77\(3\):547–552.](#)
- [Lu et al., 2018] Lu, H., Freund, R. M., and Nesterov, Y. (2018).
Relatively smooth convex optimization by first-order methods, and applications.
[*SIAM J. Optim.*, 28\(1\):333–354.](#)
- [Nemirovsky and Yudin, 1983] Nemirovsky, A. S. and Yudin, D. B. (1983).
Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization.
[Wiley, New York, NY.](#)
- [Ness and Mumford, 1984] Ness, L. and Mumford, D. (1984).
A stratification of the null cone via the moment map.
[*American Journal of Mathematics*, 106\(6\):1281–1329.](#)
- [Strassen, 1986] Strassen, V. (1986).
The asymptotic spectrum of tensors and the exponent of matrix multiplication.
In [27th Annual Symposium on Foundations of Computer Science](#), pages 49–54.
- [Strassen, 1988] Strassen, V. (1988).
The asymptotic spectrum of tensors.
[*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1988\(384\):102–152.](#)
- [van den Berg et al., 2025] van den Berg, M., Christandl, M., Lysikov, V., Nieuwboer, H., Walter, M., and Zuiddam, J. (2025).
Computing moment polytopes of tensors, with applications in algebraic complexity and quantum information.
In [Proceedings of the 57th Annual ACM Symposium on Theory of Computing](#), STOC '25, pages 756–765. ACM.
- [Verstraete et al., 2003] Verstraete, F., Dehaene, J., and De Moor, B. (2003).
Normal forms and entanglement measures for multipartite quantum states.
[*Physical Review A*, 68:012103.](#)

- [Walter et al., 2013] Walter, M., Doran, B., Gross, D., and Christandl, M. (2013).
Entanglement polytopes: Multiparticle entanglement from single-particle information.
[Science](#), 340(6137):1205–1208.