

日本応用数理学会 研究部会連合発表会 @長岡科学技術大学

逆立ち独楽に対する構造保存数値解法

坂部圭哉

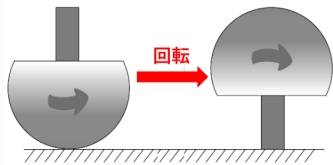
東京大学

2024 年 3 月 4 日

逆立ち独楽 (tippe top)

1/10

- 世界中で広く知られるおもちゃ
- 十分な速度で回転させると、上下が反転 (逆立ち) する



位置エネルギーの増加
物理的直感に反する！
＜実際の挙動＞

Image from: [Ciocci, Malengier, Langerock, and Grimonprez 2012]

- 古くから多くの理論研究 (抜粋)
 - 安定性解析：[Or 1994; Bou-Rabee, Marsden, and Romero 2004]
 - 真球近似：[Ciocci and Langerock 2007; Karapetyan 2008]
 - 卵型モデル：[Moffatt and Shimomura 2002]
- いずれも部分的な結果に留まり，数値シミュレーションが有用
- 汎用解法以外の例は見られない
→ この運動に適した微分方程式の数値解法の探索

真球モデル (e.g. [Or 1994])

2/10

独楽を，重心の偏った真球とみなす，最も単純なモデル

物体の形状：

- 球の半径: 1
- 重心の中心からのずれ: ϵ

状態変数：

- $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^\top \in S^2$: 軸の方向
- $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)^\top \in \mathbb{R}^3$: 角運動量

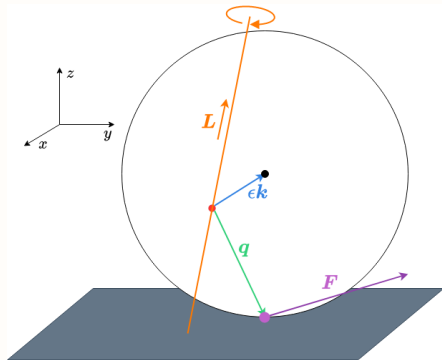
Euler の運動方程式に従って運動：

- $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{L} \times \mathbf{k}$
- $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{q} \times \mathbf{F}$

重要な量：

- $\mathbf{q} := \epsilon \mathbf{k} - \mathbf{e}_z$: 重心から接点へのベクトル
- $\mathbf{F}$: 接点に働く力で，特に摩擦力を含む

※単純化のため，慣性モーメントは I とし，並進運動を無視する．



真球モデルは、以下の**保存量・散逸量**を持つ：

- **保存量**：Jellett 定数 $J := \mathbf{q} \cdot \mathbf{L} = \epsilon \mathbf{k} \cdot \mathbf{L} - L_z$
保存性: $\dot{J} = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{L}} = \epsilon(\mathbf{L} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{L} + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{F}) = 0$
- **保存量**： $\|\mathbf{k}\|^2$
保存性: $(d/dt)\|\mathbf{k}\|^2 = 2\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 2(\mathbf{L} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$
- **散逸量**：エネルギー $H := \frac{1}{2}\|\mathbf{L}\|^2 - q_z = \frac{1}{2}\|\mathbf{L}\|^2 - \epsilon k_z + 1$
摩擦力により、エネルギーは散逸する (物理的性質)

これらはいずれも 2 次量 → **陰的中点則**を適用

Proposition

陰的中点則は、2 次保存量を保存し、2 次散逸量を散逸する。^a

^a保存量に関する証明は [Hairer, Lubich, and Wanner 2006] など。散逸量も同様に証明可能。

◎ **陰的中点則は、真球モデルに対する構造保存解法とみなせる。**

→ 性質を調べる

LaSalle の不変原理：非増大関数による力学系の漸近挙動の特徴付け (cf. Lyapunov 理論)

D 上の**連続力学系** (Φ_t ：時間発展写像)

Definition

$M \subseteq D$ が **正不変** $\iff \Phi_t(M) \subseteq M \ (\forall t)$

$M \subseteq D$ が **不変** $\iff \Phi_t(M) = M \ (\forall t)$

Proposition (LaSalle の不変原理 (連続))

コンパクトな正不変集合 M 上で C^1 級関数 $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ が**非増大**ならば、
 M 内を初期点とする解軌道は**不変集合** I に収束する。

- $I \subseteq E : E$ 内の最大の不変集合
- $E := \{\mathbf{u} \in M \mid \dot{V}(\mathbf{u}) = 0\}$

D 上の**離散力学系** ($\mathbf{u}_{i+1} = F(\mathbf{u}_i)$)

Definition

$M \subseteq D$ が **正不変** $\iff F(M) \subseteq M$

$M \subseteq D$ が **不変** $\iff F(M) = M$

Proposition (LaSalle の不変原理 (離散))

F が局所 *Lipschitz* 連続で、
コンパクトな正不変集合 M 上で連続関数 $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ が**非増大**ならば、 M 内を初期点とする点列は**不変集合** I に収束する。

- $I \subseteq E : E$ 内の最大の不変集合
- $E := \{\mathbf{u} \in M \mid V(F(\mathbf{u})) = V(\mathbf{u})\}$

Proposition ([Ciocci and Langerock 2007; Karapetyan 2008])

真球モデルの漸近状態は，下表の黄色部分

	低速回転 $ J \leq (1 - \epsilon)^2$	中速回転 $ J \in ((1 - \epsilon)^2, (1 + \epsilon)^2)$	高速回転 $ J \geq (1 + \epsilon)^2$
重心が下向き	線形安定	線形不安定	線形不安定
斜め向き	—	周回軌道	—
重心が上向き	線形不安定	線形不安定	線形安定

略証:

- ① 不変集合 I を計算すると，上表 **赤枠** 線の内側
- ② 連続版 LaSalle の不変原理より，漸近状態は I 内のどこか
- ③ 線形不安定な状態を除外
- ④ 有り得る漸近状態は J の値 (初期値で決定) ごとに 1 通り

先行研究はいずれも別証明．上の方針は離散版にも利用可能．

Theorem

真球モデルに対する陰的中点則の漸近状態は下表の黄色部分で、時間刻み幅に依存しない

	低速回転 $ J \leq (1 - \epsilon)^2$	中速回転 $ J \in ((1 - \epsilon)^2, (1 + \epsilon)^2)$	高速回転 $ J \geq (1 + \epsilon)^2$
重心が下向き	線形安定	線形不安定	線形不安定
斜め向き	—	周回軌道	—
重心が上向き	線形不安定	線形不安定	線形安定

略証:

- ① 陰的中点則の不変集合 I は上表 **赤枠** 線の内側 (連続系に一致)
- ② 離散版 **LaSalle の不変原理**より、漸近状態は I 内のどこか
- ③ 線形不安定な状態を除外 (陰的中点則は線形安定性を保つ)
- ④ 有り得る漸近状態は J の値 (初期値で決定) ごとに 1 通り

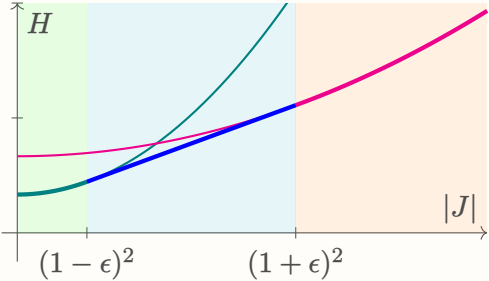
⇒ 真球モデルに対する陰的中点則は、漸近状態を完全に再現！

直感的には、最適化問題の最適解として理解できる

最適化問題

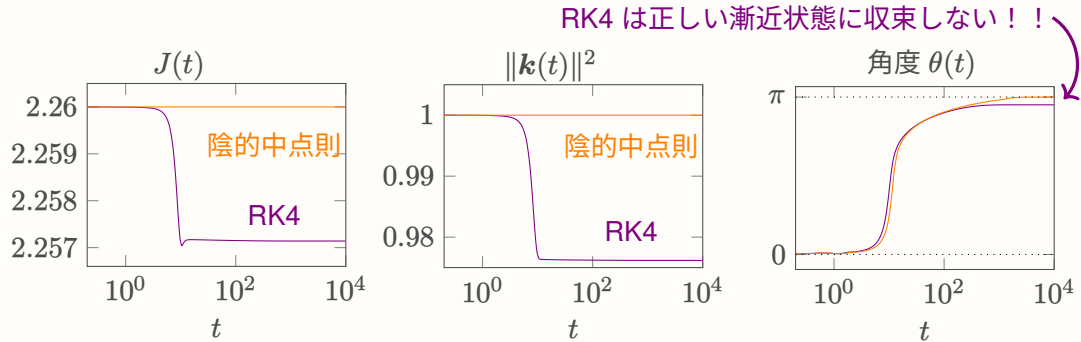
minimize_{*k,L*} *H(k, L)*
s.t. *J(k, L) = J₀*

各 *J₀* の値における目的関数値：
太線は最適解



	低速回転 $ J \leq (1 - \epsilon)^2$	中速回転 $ J \in ((1 - \epsilon)^2, (1 + \epsilon)^2)$	高速回転 $ J \geq (1 + \epsilon)^2$
重心が下向き	線形安定	線形不安定	線形不安定
斜め向き	—	周回軌道	—
重心が上向き	線形不安定	線形不安定	線形安定

陰的中点則の構造保存性 $\implies$ 漸近状態の完全再現



	低速回転 $ J \leq (1 - \epsilon)^2$	中速回転 $ J \in ((1 - \epsilon)^2, (1 + \epsilon)^2)$	高速回転 $ J \geq (1 + \epsilon)^2$
重心が下向き	線形安定	線形不安定	線形不安定
斜め向き	—	周回軌道	—
重心が上向き	線形不安定	線形不安定	線形安定

$\Delta t = 0.2, \epsilon = 0.5, \mathbf{k}(0) = (0, 0, 1)^\top, \mathbf{L}(0) = (0.1, 0, -4.52)^\top$

- 逆立ち独楽の真球モデル
 - Jellett 定数 J の保存
 - 方向ベクトルのノルム $\|k\|$ の保存
 - エネルギー H の散逸
- 陰的中点則は上記の性質を保存 → **漸近状態を完全に再現**
- 逆立ち独楽に対する構造保存解法の有用性を確認

今後の課題

- 真球以外の形状
 - Jellett 定数の保存性が無く、正しい漸近状態が不明
 - エネルギー散逸スキームを構成でき、LaSalle の不変原理は適用可能
→ 連続・離散の漸近状態の対応は不明
- 真球モデル解法に対する解析
 - 高精度化
 - 並進運動の追加・慣性モーメントの異方化

- Bou-Rabee, N., J. E. Marsden, and L. A. Romero (2004). “Tippe Top Inversion as a Dissipation-Induced Instability”. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 3, pp. 352–377.
- Ciocci, M. C. and B. Langerock (Dec. 2007). “Dynamics of the tippe top via Routhian reduction”. *Regular and Chaotic Dynamics*, 12.6, pp. 602–614. doi: 10.1134/S1560354707060032.
- Ciocci, M. C., B. Malengier, B. Langerock, and B. Grimonprez (Feb. 2012). “Towards a Prototype of a Spherical Tippe Top”. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, p. 268537. doi: 10.1155/2012/268537.
- Hairer, E., C. Lubich, and G. Wanner (2006). *Geometric numerical integration, Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*. Second. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.
- Karapetyan, A. V. (June 2008). “Global qualitative analysis of tippe top dynamics”. *Mechanics of Solids*, 43.3, pp. 342–348. doi: 10.3103/S0025654408030059.
- Khalil, H. K. (2001). *Nonlinear Systems*. Third. Prentice Hall, New Jersey.
- Moffatt, H. K. and Y. Shimomura (Mar. 2002). “Spinning eggs — a paradox resolved”. *Nature*, 416.6879, pp. 385–386. doi: 10.1038/416385a.
- Or, A. (June 1994). “The Dynamics of a Tippe Top”. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 54.3, pp. 597–609. doi: 10.1137/S0036139992235123.